Investigaciones Económicas (Segunda época). Vol. XIV, n.º 3 (1990), págs. 369-383.

UN MODELO DINAMICO CON CAPITAL PUBLICO Y SU ESTIMACION POR SIMULACION

Teresa GARCIA-MILA

Universidad Autónoma de Barcelona

Un modelo de equilibrio general dinámico con incertidumbre en el que hay dos tipos de capital, público y privado, se presenta para explicar el efecto expansivo del gasto estatal y local que se observa en la economía de los Estados Unidos. La estructura no lineal-cuadrática del modelo impide su solución explícita, por lo que se generan realizaciones de equilibrio utilizando un método de solución hacia atrás. Los parámetros fundamentales del modelo se estiman por simulación. La hipótesis nula de optimalidad del nivel de inversión pública es rechazada por los datos.

1. Introducción

Este artículo es un intento de dar respuesta teórica a un conjunto de regularidades empíricas observadas en los Estados Unidos en el período posterior a la segunda guerra mundial. El gasto público de los estados y administraciones locales tiene un efecto expansivo y a largo plazo sobre el PNB, mientras que el gasto de defensa, realizado por el estado federal, tiene un efecto ligeramente expansivo en el muy corto plazo y claramente contractivo a partir de un año. Asimismo se observa que el gasto de defensa tiene un efecto similar al del consumo privado, aunque este último tiene un efecto expansivo inicial de mayor duración. Un aumento de la inversión privada expande también inicialmente el PNB, aunque este efecto va desapareciendo paulatinamente.

A estas conclusiones se llega analizando los impulsos respuesta que se obtienen de la estimación de vectores autorregresivos de componentes del PNB[1]. Ante un shock en un componente del gasto público, la razón «respuesta del PNB/respuesta del mismo gasto público» se toma como una medida del efecto multiplicador de esa parte del gasto público, obteniendo así un multiplicador mayor que la unidad para el gasto de los estados y administraciones locales, y uno menor que la unidad a partir de un año (que incluso llega a ser negativo) para el gasto de defensa.

Una reflexión sobre la composición del gasto de los estados y administraciones locales (que consta por ejemplo de la provisión de carreteras, alcantarillado y otros servicios municipales, así como educación) nos lleva a considerar

[1] Los detalles de este estudio empírico se encuentran en García-Milá (1987).

que éste es fundamentalmente un gasto de inversión en infraestructura y capital humano y sugiere considerar un modelo con dos tipos de capital, público y privado, que interaccionan en el proceso productivo. Dado que la inversión privada no tiene un efecto expansivo tan fuerte ni permanente como la inversión pública, el modelo trata de forma asimétrica las decisiones de los dos tipos de inversión, dejando la posibilidad de que el nivel de inversión pública se decida de forma subóptima.

El gasto público de defensa no aparece explícitamente en el modelo, sino que aparece integrado con el consumo privado. La similitud empírica observada entre el consumo privado y el gasto de defensa juntamente con la dificultad de modelar las decisiones de gasto de defensa, que tienen un alto componente político, nos lleva a agregar este componente del gasto con el consumo privado. Se puede también argumentar, en favor de esta agregación, que el gasto de defensa tiene poco de inversión en infraestructura y mucho de retribución de personal y compra de material. Somos conscientes de las limitaciones de este enfoque y creemos que un tratamiento correcto de los gastos de defensa requiere una modelización más compleja que dejamos como tema de investigación abierto.

La capacidad del modelo de reflejar la realidad de la economía americana la medimos comparando los impulsos respuesta de los datos originales y de los que se obtienen con series generadas por el modelo. La minimización de esta diferencia (de los cuadrados de las distancias ponderados de forma adecuada) es el criterio que aplicamos para obtener estimaciones de los parámetros fundamentales de la economía que, dada la estructura del modelo, no se podrían obtener por el método general de momentos (GMM). El método de estimación que aplicamos, *estimación por simulación,* permitiría, en su caso, obviar los problemas de agregación que se presentan cuando se utilizan datos cuyo nivel de agregación no coincide con el intervalo temporal en el que los agentes toman decisiones.

Cabe señalar que las características específicas del modelo que estudiamos, estocástico y no lineal cuadrático, no nos permiten obtener una solución analítica explícita, ni por los métodos bien conocidos aplicables a aquellos modelos que tienen una estructura lineal cuadrática, ni planteándolo en términos de programación dinámica e iterando la función valor debido a la complejidad de las sucesivas iteraciones. Por ello utilizamos el *método de solución hacia atrás* propuesto por Sims (1985) y aplicado por primera vez por Novales (1990), que nos permite obtener trayectorias de equilibrio para todas las variables de la economía que se modela.

El modelo consigue generar series que reproducen de forma bastante satisfactoria la diferencia entre el efecto expansivo de la inversión pública y el contractivo del consumo (que incluye el gasto de defensa). La inversión privada tiene un efecto más expansivo en las series simuladas que en la realidad, aunque el modelo consigue reproducir en parte las diferencias observadas entre ésta y la inversión pública. De los resultados de la estimación se concluye que la inversión pública está por debajo del nivel óptimo.

El artículo está organizado de la siguiente forma: en la Sección 2 se hace una descripción del modelo y del método que se ha utilizado para su solución; la Sección 3 discute el método de estimación utilizado y presenta los resultados obtenidos; finalmente, en la Sección 4 se derivan las conclusiones del trabajo.

2. El modelo

2.1. Descripción

La economía que estudiamos tiene un solo bien, que es perfectamente divisible y puede utilizarse para consumo, inversión en capital privado e inversión en capital público. Suponemos una función de producción Cobb-Douglas con rendimientos decrecientes a escala y dos *inputs,* capital público y capital privado. Hay un shock tecnológico multiplicativo y, por tanto, las fluctuaciones afectan de forma idéntica la productividad de los dos capitales. Esta estructura productiva intenta incorporar en el modelo el efecto sobre la productividad del sector privado de las inversiones públicas en infraestructura y capital humano.

La economía consta de un agente (representativo) privado de vida infinita, que consume e invierte en capital privado, y el sector público que tan solo invierte en capital público. El agente privado decide las secuencias óptimas de consumo e inversión a lo largo de su vida tomando como dadas la tecnología y las decisiones del sector público así como el capital privado inicial. Suponemos que el agente privado tiene preferencias estocásticas que se pueden representar mediante una función de utilidad separable en el tiempo, aditiva y logarítmica, y que su objetivo es maximizar el valor esperado actualizado de la utilidad a lo largo de su vida.

El gobierno escoge un proceso estocástico para la inversión pública, proceso que es conocido por el sector privado, y cuya realización determina la secuencia de capital público. Esta secuencia no es conocida con anterioridad, pero los agentes pueden formar expectativas condicionadas a la información existente en cada momento ya que conocen el proceso que la genera. Dada la forma en que se decide la secuencia de inversión pública, cabe la posibilidad de que ésta no sea óptima, es decir que no coincida con la secuencia que resultaría de solucionar un problema similar al planteado con la única diferencia de que la inversión pública se decide de forma óptima, conjuntamente con el consumo y la inversión privada. Definimos el parámetro de optimalidad, p, como el cociente entre el capital público existente y el que resultaría de una decisión óptima. Si la cantidad invertida por el sector público está, por ejemplo, por debajo de ese valor óptimo (un valor de p menor que uno), dada la tecnología de la economía descrita, un aumento de esa inversión tendrá un efecto más expansivo que un aumento de la inversión privada ya que ésta se encuentra en el punto óptimo. Como veremos más adelante, al hacer la estimación del modelo se plantea un test de optimalidad de la inversión pública que consiste en contrastar la hipótesis nula de que el parámetro p es igual a la unidad.

Con el objeto de incorporar en el modelo el crecimiento del PNB, el shock tecnológico crece en el tiempo, lo que refleja cambio tecnológico así como crecimiento de la población. Dado que suponemos preferencias estocásticas, hay tres fuentes independientes de aleatoriedad en el modelo, lo cual evita problemas de singularidad cuando estimamos el vector autorregresivo de tres componentes del PNB: consumo, inversión privada e inversión pública.

El óptimo social de esta economía es la solución al siguiente problema:

$$\max_{\{C_t, Kp_t\}} E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \nu_t \ln c_t \qquad [1]$$

dados Kp_0 y la secuencia estocástica $\{Kg_t\}_{t=0}^{\infty}$, y sujeto a las siguientes restricciones:

$$C_t + Kp_t - (1-\delta) Kp_{t-1} + Kg_t - (1-\delta) Kg_{t-1} = A\, Kp_{t-1}^{\alpha} Kg_{t-1}^{\gamma} u_t \qquad [2]$$

$$C_t,\ Kp_t > 0 \qquad [3]$$

$\alpha + \gamma < 1$, y los dos positivos

ν_t es el shock de preferencias para el período t

u_t es el shock tecnológico para el período t

C_t es el consumo en el período t

Kp_t es el stock de capital privado en el período t

Kg_t es el stock de capital público en el período t

δ es la tasa de depreciación, la misma para los dos capitales

A es un parámetro de escala de la función de producción. En el período t, dado el conjunto de información:

$\Omega_t = \{C_{t-s-1}, Kp_{t-s-1}, Kg_{t-s}$ para $s \geq 0\}$, se toman decisiones sobre C_t y Kp_t.

Suponiendo que la solución es interior, las condiciones necesarias para un óptimo son:

$$\nu_t / C_t = \lambda_t \qquad [4]$$

$$\lambda_t = \alpha \beta A\, Kp_t^{\alpha-1} Kg_t^{\gamma} E_t u_{t+1} \lambda_{t+1} + \beta(1-\delta) E_t \lambda_{t+1} \qquad [5]$$

$$C_t + Kp_t - (1-\delta) Kp_{t-1} + Kg_t - (1-\delta) Kg_{t-1} = A\, Kp_{t-1}^{\alpha} Kg_{t-1}^{\gamma} u_t \qquad [6]$$

$$\lim E_0\, \beta^t \lambda_t Kp_t \longrightarrow 0 \text{ cuando } t \longrightarrow \infty \qquad [7]$$

donde λ_t es el multiplicador estocástico de Lagrange

E_t es el valor esperado condicionado a la información en t.

2.2. *Solución del modelo*

Dado que nuestro problema no cumple las condiciones de uno lineal-cuadrático, no podemos aplicar el principio de equivalencia cierta a las ecuaciones de Euler. Las condiciones de primer orden nos indican que para encontrar una solución explícita a las secuencias de consumo y capital privado es preciso expresar $E_t \lambda_{t+1}$ y $E_t u_{t+1} \lambda_{t+1}$ en función de la información existente en el momento t. Para ello necesitamos, no solo conocer los procesos estocásticos para Kg, u y ν, sino también la correspondencia de éstos con λ. El problema es que esta correspondencia es parte de la solución y por tanto no se puede obtener hasta que la solución es conocida. Estamos pues en una situación en que para poder llegar a la solución es necesario conocerla.

El lector que conoce el método iterativo de solución en programación dinámica, podrá comprobar que en este problema ese método no es útil. Aunque la estructura del modelo es en parte similar a la del que presentan Long y Plosser (1983), la presencia de capital público estocástico y exógenamente determinado así como una tasa de depreciación del capital menor que la unidad, imposibilita la extensión de su solución al problema que nos ocupa.

Para obviar estas dificultades aplicamos un método de solución hacia atrás propuesto por Sims (1985), que Novales (1990) explica con detalle y aplica a un modelo de equilibrio en el que el tipo de interés está endógenamente determinado. Este método nos permite obtener trayectorias de equilibrio para cada una de las variables sin necesidad de obtener primero una solución analítica explícita. De esta forma podemos estudiar las propiedades estadísticas de las trayectorias simuladas y compararlas con las de las series temporales de la economía americana.

El método de solución consiste en reemplazar una de las variables del proceso estocástico exógeno (en nuestro problema este vector está compuesto de Kg, u y ν) por una variable, que denominamos z, que es función de λ así como de otras variables del modelo. Esta variable z la escogemos de forma que, conociendo el proceso estocástico exógeno que incluye a z, podemos expresar $E_t \lambda_{t+1}$ y $E_t u_{t+1} \lambda_{t+1}$ en función de valores presentes y pasados de z y de las otras variables exógenas, así como de algunas variables endógenas del modelo[2]. No hay una única forma de escoger z ni tampoco un único componente del vector estocástico exógeno al que puede reemplazar. En nuestro ejemplo z reemplaza a ν por ser esta sustitución la más conveniente: por una parte, la importancia del capital público en el modelo nos ha inclinado a mantener el control directo sobre esta variable; por otra parte, la exogeneidad operativa de la variable u debe mantenerse para poder expresar la esperanza condicionada de valores futuros de u en función de la información existente en el momento t.

Definimos $z_t = A \, Kp_{t-1}^{\alpha} \, Kg_{t-1}^{\gamma} \, u_t \, \lambda_t$

Podemos entonces expresar la ecuación [5] de la siguiente forma:

$$\lambda_t = (\alpha \beta / Kp_t) \, E_t z_{t+1} + ((1-\delta) \beta / (A \, Kp_t^{\alpha} Kg_t^{\gamma})) \, E_t (z_{t+1} / u_{t+1}) \qquad [8]$$

[2] En algunos problemas hay varias variables que pueden jugar el papel de la variable z, pero no siempre todas generan soluciones estables. En nuestro caso, por ejemplo, además de solucionar el problema con la variable z descrita en el texto, hemos obtenido soluciones definiendo $z = \lambda$. En este caso las trayectorias óptimas para los dos tipos de capital resultaron explosivas.

Dado el proceso estocástico conjunto para las variables *Kg*, *u*, y *z*, podemos expresar $E_t\, z_{t+1}$ y $E_t(z_{t+1}/u_{t+1})$ en función de la información disponible en el momento *t*, y encontrar una solución para *Kp*, *C*, y ν en función de los parámetros del modelo, valores pasados de *Kp*, *C*, y ν, y valores pasados y presentes de *Kg*, *u*, y *z*. Así pues, empezando con realizaciones simuladas para el proceso estocástico conjunto de las variables *Kg*, *u*, y *z*, generamos trayectorias para *Kp*, *C*, y ν. Las trayectorias obtenidas por este método son consistentes con la elección de valores óptimos para *Kp* y *C* tomando como dado el proceso estocástico conjunto de las variables *Kg*, *u*, y ν, y son por tanto una solución del modelo que estamos estudiando.

Para obtener trayectorias de equilibrio para el consumo, la inversión privada y la inversión pública, hay que suponer valores específicos para los parámetros que definen la tecnología y las preferencias, así como la estructura y los valores de los coeficientes del proceso estocástico $S = [Kg, u, z]'$. Una vez definido el proceso estocástico para *S*, podemos expresar $E_t z_{t+1}$ y $E_t(z_{t+1}/u_{t+1})$ de la ecuación [8] en función de valores presentes y pasados de *S*, y generar realizaciones específicas de *S*. Dado que hemos establecido valores para los parámetros del modelo, podemos usar las ecuaciones [4], [8] y [6], la ecuación que define la variable *z*, y la realización de *S*, para obtener las trayectorias de equilibrio del consumo, el capital privado y el shock de preferencias. Finalmente, utilizando las trayectorias de equilibrio de los dos tipos de capital, se pueden obtener las series para la inversión pública y privada.

Al considerar la validez de este tipo de solución hay que tener en cuenta que, el hecho de suponer un proceso estocástico para el vector $S = [Kg, u, z]'$ en lugar de para el vector $S^* = [Kg, u, \nu]'$ puede modificar la estructura de información de la solución obtenida respecto a la del modelo original. Esto se da en el caso en que valores presentes y pasados de *z* contienen más (o menos) información que valores presentes y pasados de ν. En este caso, la solución que se obtiene por este método corresponde a una situación en que el agente económico tiene acceso a más (o menos) información que valores presentes y pasados de las variables exógenas, *Kg*, *u* y ν, y valores pasados de las variables de elección, *C* y *Kg*. Si valores presentes y pasados de *S* contienen menos información que la que contiene S^*, el método descrito puede llevar a una solución que no es óptima, en el sentido que el agente representativo está tomando decisiones «óptimas» usando un conjunto de información más reducido que el de los supuestos originales. Si las predicciones mejoran usando S^* en lugar de *S*, bajo el supuesto de Expectativas Racionales la solución que obtenemos no es óptima. En este caso decimos que nuestra solución no es estable.

La situación contraria, que denominamos falta de invertibilidad, se da cuando *S* contiene mayor información que S^*. En este caso la solución no se invalida, pero su significado cambia ya que el agente económico tiene más información que la que el observador (quizá un econometra) puede ver. La descripción de tests de invertibilidad y estabilidad, así como sus resultados para el modelo que nos ocupa se encuentran en García-Milà (1987), donde se demuestra que las trayectorias que se generan al solucionar el modelo en la forma descrita son estables e invertibles.

3. Estimación y simulaciones

3.1: Estimación por simulación

El método de estimación que aplicamos consiste en minimizar una suma ponderada de cuadrados de las distancias entre los estadísticos de las series generadas con nuestro modelo y los mismos estadísticos para las series originales observadas en la economía americana. Los estadísticos que se utilizan son los coeficientes de un vector autorregresivo de cinco retardos para un sistema de tres variables: consumo, inversión privada, e inversión pública.

Para el sistema que se estima con datos de la economía de los Estados Unidos, la variable consumo incluye, además de los componentes de consumo privado del PNB, los gastos del gobierno federal (que son en gran proporción gastos de defensa), y las exportaciones netas; la variable inversión privada es la suma de todos sus componentes; la inversión pública se corresponde con las compras de bienes y servicios por parte de los estados y las administraciones públicas (en algunas versiones se incluyen en esta variable los gastos federales no militares). Para el sistema estimado con las series simuladas, las tres variables tienen correspondencia directa con las del modelo.

Definimos $H_T(\theta_0)$ como un vector de dimensión $q \times 1$ que representa los coeficientes del VAR estimado con los datos observados para la economía real (que denominamos Y_T). T se refiere a la longitud de la serie, que en nuestro caso va desde el segundo trimestre de 1948 hasta el segundo de 1983, q es el número de coeficientes del VAR, 48 en nuestro caso, θ es el vector de parámetros que queremos estimar, cuya dimensión es $k \times 1$, y θ_0 contiene la representación del verdadero valor de los parámetros.

Definimos $H_N(\theta)$ como el vector de coeficientes del VAR estimados con las series simuladas (que denominamos $X_T(\theta)$), donde N es un múltiplo de T, es decir $N = T \times m$, y m es el número de trayectorias de longitud T generadas para un valor dado de θ. Si denominamos por $H_{Ti}(\theta)$ el vector de coeficientes del VAR para cualquiera de las trayectorias simuladas, entonces:

$$H_N(\theta) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} H_{Ti}(\theta)$$

Dentro del vector θ consideramos dos bloques, el conjunto de parámetros que determina la tecnología y preferencias (que tiene 6 componentes), y el conjunto de parámetros que define la estructura del vector estocástico tridimensional S, el vector del que suponemos su comportamiento cuando generamos trayectorias de equilibrio.

Definimos: $f_i(X_T(\theta), Y_T) = (H_{Ti}(\theta) - H_T(\theta_0))$ para $i = 1, 2, \dots m$

Nótese que $E(f_i(X_T(\theta), Y_T) = 0$ para $\theta = \theta_0$

$E(f_i(X_T(\theta), Y_T) \neq 0$ en cualquier otro caso

Definimos:

$$F_m(X_T(\theta), Y_T) = 1/m \sum_{i=1}^{m} f_i(X_T(\theta), Y_T) = 1/m \sum_{i=1}^{m} (H_{Ti}(\theta) - H_T(\theta_0)) =$$

$$= (H_N(\theta) - H_T(\theta_0))$$

El estimador de θ, que denominamos $\hat{\theta}_m$, soluciona el siguiente problema de optimización:

$$\min_{\theta} (F_m(X_T(\theta), Y_T))' W^{-1} (F_m(X_T(\theta), Y_T)) \qquad [9]$$

donde W es la matriz de covarianzas de $H_T(\theta_0)$. Como valor de W utilizamos su estimador utilizando la muestra de T observaciones de la economía real.

El vector de parámetros estimado $\hat{\theta}_m$ converge en distribución[3] a una normal con media igual al verdadero valor del vector de parámetros θ_0, y varianza igual a $(B'W^{-1}B)^{-1}$. Para valores pequeños de m, la varianza del vector de parámetros estimado es:

$$(B'W^{-1}B)^{-1} + 1/m\,(B'W^{-1}B)^{-1} \qquad [10]$$

La matriz B, que es una matriz no singular de dimensión $q \times k$, es igual a $E(\partial H_{Ti}(\theta_0)/\partial\theta)$, y su estimador lo obtenemos promediando todas las simulaciones.

3.2. *Implementación y resultado de la estimación*

La estimación se ha realizado utilizando la opción GRADX del paquete GQOPT de optimización no lineal. Esta opción aplica una modificación del método de Newton (el «Quadratic Hill Climbing»)[4] que asegura convergencia incluso cuando el punto inicial está lejos del óptimo. El método, sin embargo, utiliza una aproximación cuadrática y, por tanto, si la función objetivo no lo es, el resultado obtenido puede no ser un óptimo global. Por ello hemos realizado comprobaciones adicionales evaluando la función objetivo para valores

[3] La convergencia asintótica de los estimadores por simulación cuando el modelo es estacionario se demuestra en Ingram y Lee (1986), en Pakes y Pollard (1986), y en Duffie y Singleton (1989). Una extensión de estos resultados al caso no estacionario se aplicaría al modelo que estamos discutiendo. Parece probable que los resultados se puedan extender al caso en que los estadísticos tienen una distribución Normal (como es el caso de los coeficientes de los VAR tal como demuestra Sims (1986a)), y que la correspondencia entre el límite probabilístico de esos estadísticos y el vector de parámetros a estimar sea diferenciable.

[4] Este método se describe en Goldfeld y Quandt (1972).

de los parámetros distintos a los valores a los que la rutina GRADX convergía. Esta comprobación se ha hecho de forma sistemática aplicando un método de interpolación Bayesiano desarrollado por Sims (1986 b).

Dada la complejidad de la función objetivo hemos limitado el valor de m a 5, y por la misma razón hemos estimado sólo un subconjunto del vector total de parámetros. Nos hemos centrado en la estimación de los parámetros que definen la tecnología y preferencias de la economía, así como el parámetro que determina el nivel de suboptimalidad de la inversión pública. No hemos pues estimado los parámetros que definen los procesos estocásticos del vector S, aunque el método de estimación por simulación permite obtener estimaciones de todos los parámetros, y por tanto también de este conjunto de parámetros, lo que da a este método ventaja sobre otros que no pueden siempre identificar todos los parámetros de interés.

La estimación del modelo se ha realizado considerando el período de un mes como el intervalo temporal relevante en la toma de decisiones. Las simulaciones del modelo son datos mensuales, que agregamos antes de estimar los coeficientes del VAR. Estos estimadores se comparan con los de la economía real, que provienen de datos trimestrales. Esta operación la repetimos cinco veces (ya que m es cinco en nuestro caso) con distintas realizaciones de las innovaciones del vector S. El promedio de los cinco grupos de coeficientes VAR son los que se comparan con los estimados para la economía real.

Los estimadores que presentamos son los valores a los que ha convergido el algoritmo usado para minimizar la función objetivo no lineal [9] [5]. La estimación de B se ha obtenido calculando derivadas numéricas de los estimadores de los coeficientes de los VAR respecto a cada uno de los seis parámetros. Las derivadas han sido calculadas en el punto óptimo para cada una de las cinco iteraciones, promediando luego los resultados. La matriz de covarianzas del vector estimado $\hat{\theta}_m$ se calcula sustituyendo en la ecuación [10] los estimadores de B y W.

[5] Para los siguientes valores iniciales:

α	.3095	.19090	.32
β	.97889	.95158	.973
γ	.2614	.17084	.33
δ	.017375	.014916	.025
A	.338816	.701336	.394
p	.59	.62641	.52

los valores de convergencia del algoritmo fueron los mismos, tanto para los parámetros como para las segundas derivadas de la función objetivo. Se han probado también valores iniciales más alejados del óptimo, como por ejemplo $\theta_{\text{inicial}} = (.5, .85, .1, .04, .45, .9)$. Aunque nunca se llegó a obtener convergencia antes de que el programa se interrumpiera por su excesiva duración, los parámetros y valor de la función objetivo se movían en la misma dirección que en los otros casos mencionados anteriormente. Después de 130 iteraciones y 4211 evaluaciones de la función objetivo, el vector de parámetros se encontraba en

$\theta = (.38, .954, .395, .0255, .138, .581)$.

Se ha supuesto que el proceso estocástico S tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} Kg_t &= 1.96322\ Kg_{t-1} - .963165\ Kg_{t-2} + \varepsilon_{1t} \\ u_t &= .01189543 + .9459\ u_{t-1} + .000023\ t + \varepsilon_{2t} \\ z_t &= .03 + .9\ z_{t-1} + \varepsilon_{3t} \end{aligned}$$

Donde ε_{1t} ε_{2t} ε_{3t} son las innovaciones de Kg, u y z respectivamente, con valores esperados iguales a cero y la siguiente matriz de covarianzas:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} .333\text{-}6 & & \\ 0 & .333\text{-}4 & \\ 0 & .666\text{-}5 & .333\text{-}5 \end{bmatrix}$$

Esta especificación refleja en parte el comportamiento de los datos ya que es el resultado de una búsqueda no sistemática entre varias alternativas[6]. Aunque los parámetros de esta especificación son estocásticos, dado que son estimaciones no sistemáticas de parámetros desconocidos, en el proceso de estimación del resto de parámetros los tratamos como si fueran constantes, y por tanto los resultados que presentamos deben entenderse dentro de esta limitación.

El vector de parámetros estimado es: $\theta = (\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, p)$[7]. De acuerdo con el modelo descrito anteriormente, α y γ son los parámetros tecnológicos de la función de producción Cobb-Douglas para el capital privado y público respectivamente, A es el factor de escala de producción, δ es la tasa de depreciación, y β es el factor de descuento. El parámetro p es la razón entre el valor observado de capital público y el que sería óptimo. Entendemos por valor óptimo de capital público aquel que se hubiera escogido si la inversión pública se decidiera de forma óptima conjuntamente con la inversión privada y el consumo. Valores de p distintos de la unidad indican que el nivel de capital público no es óptimo, siendo su valor demasiado pequeño si p es menor que la unidad, y demasiado elevado en caso contrario. Las decisiones de inversión privada y consumo son óptimas dado el nivel de capital público.

Los estimadores, los valores de los estadísticos t, y la matriz de covarianzas de estos estimadores son:

[6] No existe una forma sistemática de determinar el proceso S. Se ha analizado el comportamiento histórico de la inversión pública para fijar el proceso para el capital público. Para la variable z, dado que es una aproximación al cociente entre el *output* y el consumo, se ha analizado la serie formada por este ratio, usando la información obtenida para especificar su forma en el modelo. Para el proceso aleatorio u, se ha buscado una especificación que recogiera el doble aspecto de innovación tecnológica y componente cíclico.

[7] Si fuéramos capaces de estimar el vector completo de parámetros desconocidos, θ incluiría todos los coeficientes que especifican la forma ARIMA del proceso estocástico vectorial S, así como las varianzas y covarianzas del vector aleatorio ε. En nuestro modelo, y bajo el supuesto de que la estructura y orden del proceso son las elegidas, el vector θ tendría 17 elementos, y no sólo los seis que se estiman.

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} &= .31717 & t &= 10.2079 \\ \hat{\beta} &= .974538 & t &= 239.91 \\ \hat{\gamma} &= .428548 & t &= 12.73 \\ \hat{\delta} &= .020953 & t &= 19.338 \\ \hat{A} &= .020953 & t &= 13.892 \\ \hat{p} &= .2889 & t &= 2.0519 \end{aligned}$$

Covarianza:

.9654E-3					
−.1228E-3	.1651E-4				
−.8206E-3	.1040E-3	.1133E-2			
−.1848E-4	.1521E-3	.1741E-4	.1174E-5		
−.2603E-3	.2493E-4	−.3360E-4	.1204E-4	.3279E-3	
.4116E-2	−.5261E-3	−.4452E-2	−.7982E-4	−.5934E-3	.1982E-1

Todos los parámetros son estadísticamente distintos de cero a un nivel de significación del 5 %. El parámetro β es también significativamente distinto de la unidad. El valor absoluto del estadístico t para esta hipótesis nula es 6.2683.

Un test de la bondad de ajuste del modelo se realiza con el estadístico:

$$(F_m\,(X_T(\theta),\, Y_T))' \quad ((1 + 1/m)\, W)^{-1} \quad (F_m(X_T(\theta),\, Y_T)) \qquad [11]$$

que tiene una distribución χ^2 con 42 grados de libertad (la dimensión de F_m menos el número de parámetros que se estiman). El valor de [11] es 311.26, que es altamente significativo a un nivel de significación del 5 %[8]. El ajuste no es tampoco bueno si se aplica el criterio de Schwartz, que fija el valor de rechazo de la hipótesis para muestras grandes igual al logaritmo neperiano del tamaño muestral multiplicado por el número de grados de libertad. Una posible interpretación de un ajuste tan pobre es que hemos impuesto muchas restricciones en la estimación al suponer los valores de todos los parámetros que definen el proceso estocástico S.

En los Gráficos 1 a 3 se pueden observar los impulsos respuesta que se obtienen al estimar un VAR con las series simuladas por el modelo. Los parámetros de preferencias y tecnología, así como el parámetro p (que indica el grado de optimalidad del capital público), se fijan igual a los valores obtenidos en la estimación.

En el Gráfico 1 observamos una respuesta positiva y persistente del PNB ante un shock en la inversión pública, siendo esta respuesta mayor que la de la inversión pública ante un shock en sí misma. Este resultado se corresponde de forma muy próxima al observado en la economía de los Estados Unidos. Podemos decir que el modelo reproduce el efecto multiplicador de aquella parte del gasto público que se dedica a inversión.

Los impulsos respuesta a un shock en el consumo (representados en el Gráfico 3) reproducen también las principales características observadas en la

[8] El 95 percentil de una χ^2 con 40 grados de libertad es igual a 55.8.

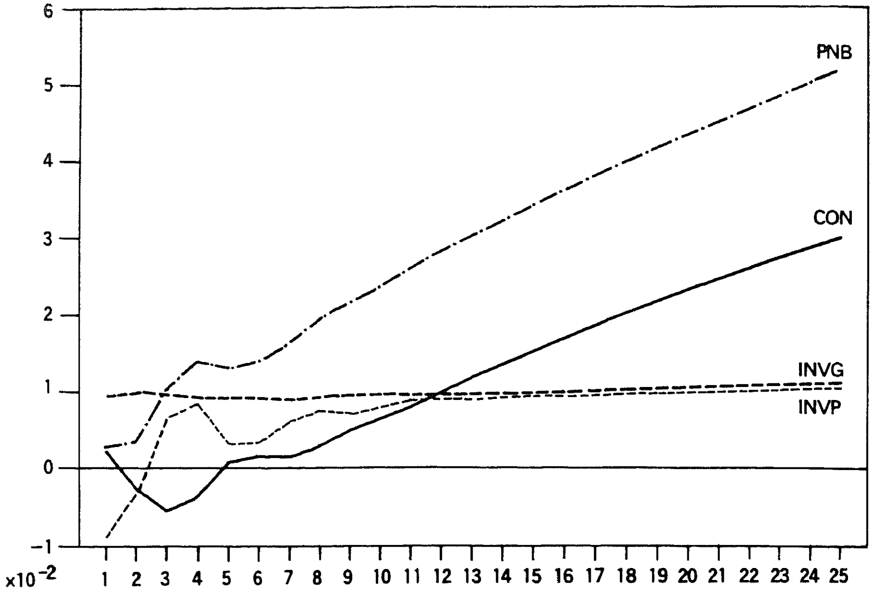

Gráfico 1

Respuesta a una innovación de inversión pública (INVG)

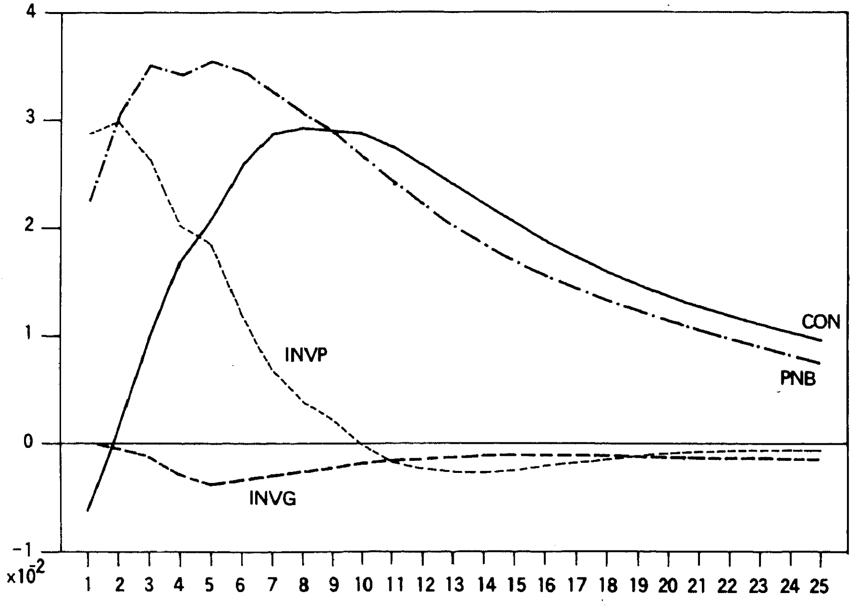

Gráfico 2

Respuesta a una innovación de inversión privada (INVP)

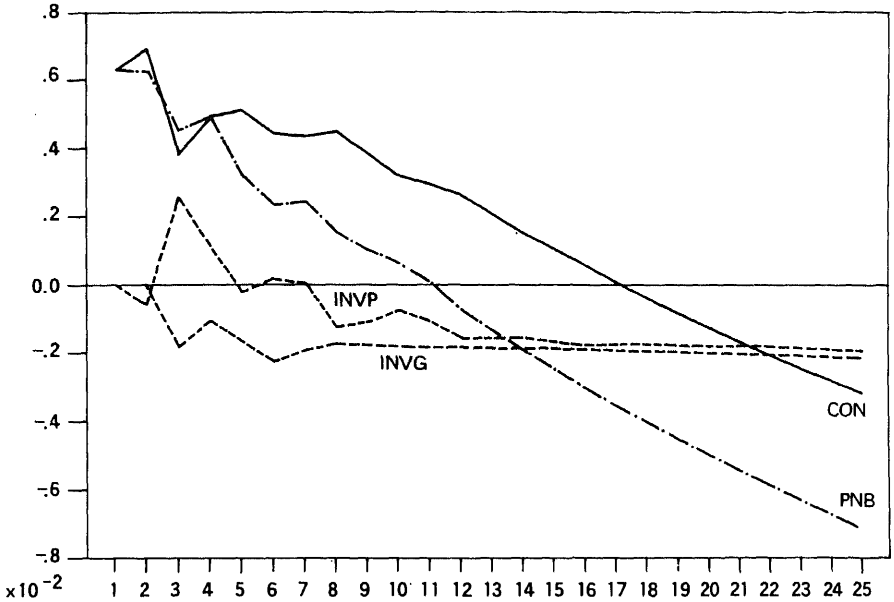

Gráfico 3

Respuesta a una innovación de consumo (CON)

economía real, es decir una respuesta del mismo consumo mayor que la del PNB, y una reacción de éste negativa a partir de un cierto tiempo. El modelo parece capaz de reproducir la ausencia de un efecto multiplicador a largo plazo del consumo (que incluye gasto público de defensa).

Los impulsos respuesta a un shock en la inversión privada son los que dan resultados menos satisfactorios. Como se puede ver en el Gráfico 2, tanto el PNB como la inversión responden de forma positiva y creciente inicialmente y disminuyen paulatinamente después, pero este descenso debería ser mucho más pronunciado para asemejarse al comportamiento de las series de la economía real.

Una diferencia importante entre las series simuladas y las observadas está en la magnitud de los impulsos respuesta, especialmente en el caso de la respuesta a un shock del consumo. Posiblemente, se hubiera podido conseguir un mejor ajuste si los parámetros que definen el proceso estocástico *S* hubieran sido también estimados.

Los residuos del consumo y la inversión privada tienen una correlación contemporánea elevada, mientras que ésta es pequeña entre los residuos de la inversión pública y el consumo, así como entre los residuos de los dos tipos de inversión. Así pues, distintas ortogonalizaciones del sistema modifican los impulsos respuesta a un shock en las variables consumo e inversión privada, pero dejan prácticamente inalterados los resultados que hacen referencia a la inversión pública. Dado que el objetivo principal de este trabajo es reproducir el comportamiento de la inversión pública, su invariabilidad ante distintas especificaciones de los impulsos respuesta es una buena característica del modelo.

Un contraste interesante en nuestro modelo es si el parámetro p es o no distinto de la unidad. Si p no es significativamente distinto de uno, no podemos concluir que el gobierno decida de forma sub-óptima el nivel de inversión pública. Dado que el estimador de p es menor que la unidad, el contraste se plantea con la alternativa de p menos que la unidad. El valor absoluto del estadístico t para esta hipótesis nula es 5.05, lo cual indica que la hipótesis de optimalidad de la inversión pública se rechaza a un nivel de significación del 5 %.

4. Conclusiones

Un modelo de equilibrio general dinámico con incertidumbre en el que hay dos tipos de capital, público y privado, se propone como una explicación del comportamiento observado en la economía de los Estados Unidos en el período posterior a la segunda guerra mundial. El estudio se centra en reproducir las diferencias observadas en la economía real entre el efecto sobre el PNB de la inversión pública, de la inversión privada, y del consumo y otros tipos de gasto público (esencialmente gastos de defensa).

Aunque los dos tipos de capital entran de forma simétrica en la función de producción, el supuesto de que el nivel de inversión pública no se decide de forma óptima, introduce la posibilidad de que el capital público y el privado afecten de forma distinta a la expansión del PNB. La estimación del parámetro de suboptimalidad del capital público indica que éste está por debajo del nivel óptimo.

La comparación de los impulsos respuesta de los datos originales y de los correspondientes a las series simuladas por el modelo permite concluir que el modelo reproduce bastante bien dos de las características observadas en la economía real: 1) la respuesta positiva y persistente del PNB a un shock en el gasto público de los estados y administraciones locales, respuesta que es mayor que la respuesta del gasto público ante su shock, y que por tanto indica un efecto multiplicador de éste; 2) ante un shock en el consumo (que incluye gasto de defensa), éste tiene una respuesta mayor que la del PNB para casi todos los retardos, careciendo por tanto este componente del gasto de efecto multiplicador.

El modelo que hemos presentado es muy sencillo, y es difícil que con sólo tres variables pueda reflejar las complejidades dinámicas de los componentes del PNB. Sin embargo, dada su simplicidad, reproduce de forma bastante satisfactoria las relaciones dinámicas entre el gasto público de los estados y administraciones locales, el consumo definido de forma amplia, la inversión privada, y la producción agregada.

Teniendo en cuenta la evidencia presentada en este trabajo, la insuficiencia de infraestructura es una explicación pausible del efecto expansivo observado en algunos componentes del gasto público. Por supuesto no se descartan otras posibles interpretaciones, aunque parece poco probable que explicaciones basadas en mecanismos de demanda puedan reconciliar las diferencias observadas en los efectos de los distintos componentes del gasto público.

Referencias

Duffie, D. y Singleton, K. (1989): «Simulated Moments Estimation of Markov Models of Asset Prices», NBER, Technical Working Papers, núm. 87.
Fisher Ingram, B. y Bong-Soo, L. (1986): «Estimation by simulation».
García-Milá, T. (1987): «Government Purchases and Real Output: An Empirical Analysis and Equilibrium Model with Public Capital», Documento de Discusión, W. P: 93.88, Dpto. de Economía e Historia Económica, UAB.
Goldfeld, S. M. y Quandt, R. (1972): *Nonlinear Methods in Econometrics,* North-Holland, Amsterdam-London.
Novales, A. (1990): «Solving Nonlinear Rational Expetations Models: A Stochastic Equilibrium Model of Interest Rates», *Econometrica,* vol. 58, *núm. 1,* págs. 93-111.
Pakes, A. y Pollard, D. (1986): «The Asymptotics of Simulation Estimators», Social System Research Institute, University of Wisconsin-Madison no. 8628.
Sims, C. A. (1983): «Is there a Monetary Business Cycle?», *American Economic Review, Papers and Proceedings,* págs. 228-233.
Sims, C. A. (1985): «Solving Nonlinear Stochastic Equilibrium Models Backwards», Center for Economic Research, University of Minnesota, no. 206.
Sims, C. A. (1986a): «Asymptotic Normality of Coefficients in Vector Autoregression with some Unit Roots», Center for Economic Research, University of Minnesota, no. 229.
Sims, C. A. (1986b): «BAYESMTH: A Program for Multivariate Bayesian Interpolation», Center for Economic Research, University of Minnesota no. 234.

Abstract

A dynamic general equilibrium model under uncertainty with two types of capital, private and public, is presented to explain the expansionary effect of state and local expenditures in the USA economy. Given that the model is not linear-quadratic, an explicit solution cannot be obtained but equilibrium paths are generated using a backward method solution. The fundamental parameters of the model are estimated by simulation. The null hypothesis that public investment is at its optimal level is rejected by the data.

Recepción del original, mayo de 1989
Versión final, marzo de 1990